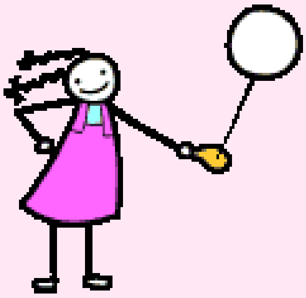
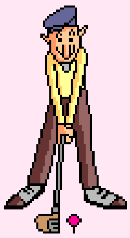
Motto:
„Universul…este scris într-o limbă matematică
şi caracterele sunt triunghiuri, cercuri şi alte figuri geometrice,
mijloace fără de care ar fi cu neputinţă să înţelegem ceva ”
Galileo Galilei

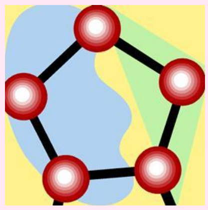
PARTEA a IV-a

DESCOPERĂ MATEMATICA ALTFEL





Din cuprins:



IV.1. SIMPOZIONUL "DESCOPERĂ MATEMATICA ALTFEL"

"Învăţând matematica, înveţi să gândeşti", spunea marele matematician Grigore C. Moisil. „*Să căutăm să gândim mult, nu să ştim mult*", spunea Democrit; „*Să nu apreciem progresul prin mărturiile memoriei, ci prin ale judecăţii*", spunea Mointaigne. Plecând de la aceste moto-uri şi nu numai, ne-am gândit să înţelegem matematica şi „altfel" prin organizarea unui simpozion care să aibă la bază matematica aplicată cu frumuseţea problematicii sale, cu coerenţa logică şi eficienţa ei.

Astfel, am avut deosebita plăcere, ca alături de d-na profesoară de matematică Dorina Szatmari, să iniţiem şi să organizăm, joi, 29 martie 2012, simpozionul intitulat „Descoperă matematica altfel", aşa cum a descoperit-o şi marele matematician Grigore C. Moisil.

De fapt, această manifestare de la Şcoala „Nicolae Bălcescu" din Oradea a fost dedicată ilustrului matematician, părintele informaticii româneşti Grigore C. Moisil, la eveniment fiind invitată nepoata matematicianului, dna prof. univ. dr. Ioana Moisil.

Aş dori să mulţumesc pe această cale invitatei speciale, d-na Ioana Moisil pentru onoarea pe care ne-a făcut-o acceptând invitaţia la simpozion, conducerii şcolii – domnului director Ioan Mocan şi d-nei director adjunct Szabó Gyöngyi, d-nei profesoare Dorina Szatmari şi tuturor membrilor catedrei de matematică, celorlalţi profesori din şcoală implicaţi în această manifestare – d-nelor Ioana Klein, Alina Zaha, Simona Vancea, Doina Văleanu, Angela Pop, d-nei Violeta Păruş şi elevilor dânsei, tuturor elevilor participanţi, care s-au afirmat în mod plăcut prin materialele prezentate în cadrul acestui simpozion, precum şi invitaţilor mass-media, d-lui Ovidiu Dan şi d-nei Crina Dobocan, care au participat la eveniment şi au reacţionat imediat cu articole frumoase.

Matematica altfel din cadrul simpozionului a cuprins expoziţie de desene, matematica şi arta, matematică în proiecte, matematică în poveşti, anul 2012 în probleme, jocuri matematice, matematica în cântece, precum şi o festivitate de premiere.

Simpozionul a debutat în curtea şcolii cu un careu, în cadrul căruia doamna profesor Ioana Moisil a fost primită cu multă căldură. Domnul director Mocan a afirmat că avem nevoie de modele, iar d-na Moisil este un model pentru noi toţi. Toţi cei prezenţi în careu au avut posibilitatea şi onoarea de a o asculta pe d-na Moisil care şi-a exprimat bucuria că participă la o activitate în care *se abordează o matematică altfel, deoarece modul în care se predă la şcoli este extrem de arid şi îi face pe copii să se îndepărteze de matematică, o matematică extrem de frumoasă şi care deschide foarte multe uşi celor care o privesc îndeaproape*. Doamna şi-a exprimat mulţumirea, în calitate de membru al familiei Moisil, deoarece unchiul dânsei, marele matematician Grigore C. Moisil nu este uitat, iar simpozionul i-a fost dedicat acestuia şi a continuat să vorbească auditoriului despre dânsul. În încheierea discursului, d-na Moisil *i-a felicitat pe organizatori pentru că ţin ştacheta ridicată, i-a îndemnat pe cei prezenţi să participe şi să organizeze astfel de simpozioane, să privească şcoala puţin şi în afara programei şcolare pentru a vedea şi alte deschideri, le-a urat succes şi împliniri în tot ceea ce fac celor prezenţi, şi mai ales participanţilor la simpozion.* Spre finalul careului, dl director Ioan Mocan i-a înmânat doamnei profesor Ioana Moisil o plachetă în semn de aleasă preţuire, iar elevii din ciclul primar au asaltat-o pe d-na Moisil cu întrebări şi îmbrăţişări.

D-na profesor Moisil ne-a oferit bucuria de a scrie câteva rânduri în Cartea de onoare a Şcolii Nicolae Bălcescu.

Pe parcursul vizitării şcolii şi a secţiunii *Desene* s-a putut vedea cum coridoarele şcolii erau împânzite de desene ingenioase, care cuprindeau citate şi replici cu haz ale ilustrului matematician Grigore C Moisil, copiate într-un stil aparte de către elevi ai şcolii, coordonaţi de d-na profesoară de desen Ioana Klein; grafica pe calculator afişată a fost realizată de către subsemnata, Ioana Dziţac.

Simpozionul propriu-zis a avut loc în Cabinetul de română al şcolii, unde s-au retras pentru prezentarea lucrărilor participante la simpozion toţi copiii şi profesorii implicaţi, dar şi alţi invitaţi. D-na profesoară Szatmari a dat cuvântul invitatei speciale, d-nei Ioana Moisil, care a vorbit celor prezenţi despre unchiul dânsei, dl Grigore C Moisil, dar şi despre relaţia dintre matematică şi artă.

În cadrul secţiunii *Matematica în proiecte*, subsemnata am prezentat referatul Matematică pentru prezent şi viitor, referat care a luat premiul I în cadrul Proiectului Sclipirea minţii, 2011 şi care a fost coordonat de d-na prof. Dorina Szatmari. În cadrul acestui proiect am prezentat un model de viaţă care a reuşit prin studiul matematicii, în acest caz fiind vorba de d-na Ioana Moisil, căreia i-am oferit o carte de-a mea de matematică, treptele matematice pentru clasa a VI-a, însoţită de o diplomă pe care am personalizat-o şi i-am dedicat-o în semn de mulţumire.

În cadrul *proiectului Sat şi oraş în acelaşi Univers*, elevii Pleş Vlad, Benea Alexandru, Vancea Vivia de la Şcoala cu cls. I-VIII din Girişu de Criş, coordonaţi de d-na profesoară Violeta Păruş, au prezentat teoria Big-Bang. În cadrul aceluiaşi proiect subsemnata, urmată de elevele Pîrja Miruna, Mărcuş Andrada şi elevii Oanea George, Szekely Ronaldo, am prezentat informaţii însoţite de calcule matematice privind alinierea planetelor, coordonaţi fiind de d-na prof. Dorina Szatmari.

Proiectul Euro Math i-a avut ca protagonişti pe elevii Nan Paula, Domocoş Fabian, Medeşan Vlad, Săteanu Alexia din clasa a II-a, coordonaţi de doamnele prof. Vancea Simona şi Văleanu Doina, apoi pe elevii Şuta Andrei şi Băguţ Andrei, coordonaţi de doamnele profesoare Szatmari Dorina, Pop Angela şi Văleanu Doina.

Matematica în poveşti le-a adus în prim-plan pe elevele Rîmbu Renata şi Matei Teodora, care sub coordonarea d-nei profesoare Dorina Szatmari, ne-au prezentat matematica îmbrăcată în poveste cu Pufuleţ şi Pufuraş, după care eleva Totoran Andrada, tot sub coordonarea d-nei Dorina Szatmari, ne-a prezentat câteva probleme selectate de la Concursul Plus-minus poezie, pe aceeaşi tematică referitoare la matematica în poveşti.

Anul 2012 în probleme a fost prezentat pe diferite grade de dificultate şi diferite nivele, de către elevii Muscă Andrei, Dumbravă Mihai, coordonaţi de dl prof. Pîrja Radu, urmaţi de elevele Pîrja Miruna, Ungur Anda şi Dziţac Ioana, coordonate de d-na prof Dorina Szatmari.

În cadrul secţiunii *Jocuri matematice*, elevii But Popa Ioana şi Szekely Alexandru, coordonaţi de d-na prof. Vancea Simona, precum şi subsemnata, coordonată de d-na prof. Szatmari Dorina au prezentat diverse jocuri distractive pentru elevi, în care se foloseau diferite noţiuni matematice îmbinate cu diferite alte noţiuni utile din diverse domenii: astronomie, ecologie, Internet, etc.

Matematica în cântece ne-a fost prezentată de către solişti vocali şi grupurile vocale ale acestora, elevi ai şcolii noastre din clasele V-VIII. Dintre aceştia amintesc elevii: Bondar Andreea, Firez Andra, Drăgoi Alina, Simuţ Denisa, Budurean Ioana, Pereţ Oana, Caba Rebeca, Lobonţ Cătălina, Mihoc Eduard, Barta Robert şi alţi elevi, coordonaţi de domnii profesori Alina Zaha, Pîrja Radu, Onofrei Anca, Arvai Ladislau.

Simpozionul s-a sfârşit prin oferirea de diplome tuturor celor implicaţi în iniţierea şi organizarea simpozionului, iar fiecare elev participant a primit o diplomă de participare, pentru a nu uita de acest minunat simpozion care a avut loc la Oradea. În ceea ce mă priveşte nu-l voi uita, căci, undeva pe biroul meu, stă aşezat un diamant care are imprimat în interiorul său numele, data simpozionului, un trandafir şi care mi-a fost dedicat cu admiraţie de către o persoană dragă mie.

Prin intermediul simpozionului *„Descoperă matematica altfel”* am adus spiritul moisilean pe meleaguri bihorene, am reuşit să facem vizibilă Oradea pe harta matematicii.

prof. univ. dr. Ioana Moisil & Ioana Dziţac & prof. Dorina Szatmari
cu ocazia Simpozionului "Descoperă matematica altfel", Oradea, 29.03.2012

IV.2. MATEMATICĂ APLICATĂ ÎN ŞTIINŢE ŞI ÎN VIAŢA COTIDIANĂ

1. Un elev măsoară distanţa de la baza unui pom şi baza blocului, aceasta fiind AB = 144 m, iar distanţa de la primul pom şi un alt pom fiind AM = $24\sqrt{3}$ m. Prin intermediul unui laser, elevul măsoară unghiul BAC dintre planul Pământului şi dreapta AC, acesta având măsura de 30°. Cunoscând faptul că punctele A, N şi C sunt coliniare, se cere să se calculeze:

a) înălţimea blocului;

b) înălţimea MN a pomului şi, respectiv să se stabilească aproximativ până la ce etaj se află vârful pomului MN.

Rezolvare: Construim desenul din *figura IV.1* pentru o mai uşoară înţelegere.

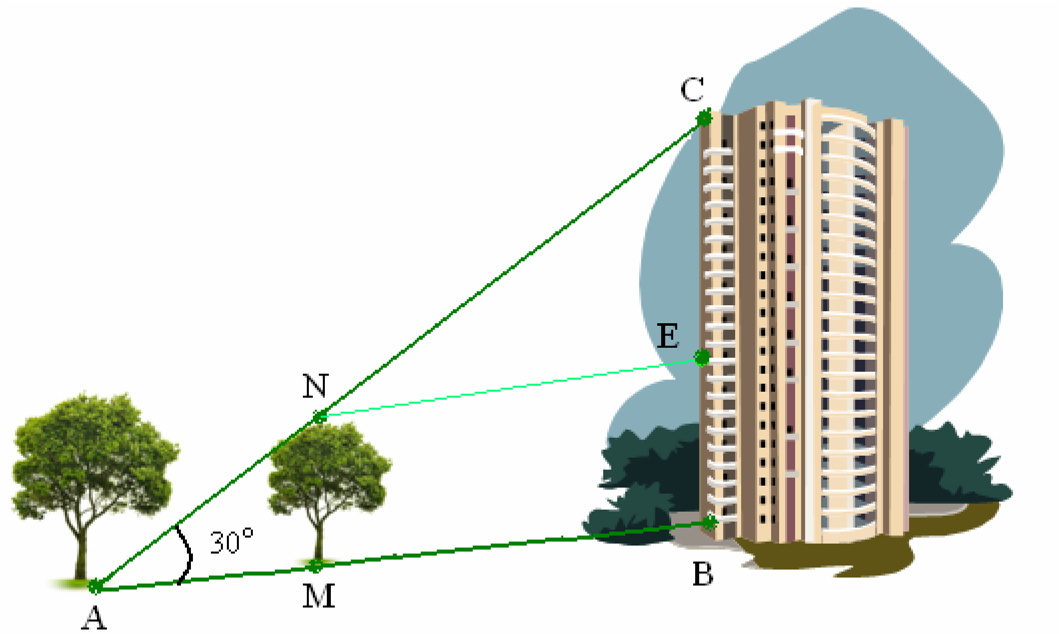


Figura IV.1. Desenul aferent problemei 1 (IV.2)

a) Cum $AB \perp BC \Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghi în B, prin urmare:

$$tg30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BC}{144} \Rightarrow BC = 48\sqrt{3}\text{m}$$

b) Din $MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{MN}{48\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{144} \Rightarrow MN = 24\text{ m}$.

Construind $NE \parallel MB \Rightarrow [MN] \equiv [BE] \Rightarrow$ vârful pomului MN, adică punctul N coincide cu punctul E, iar prin numărare, rezultă că vârful pomului MN ajunge la etajul 10.

2. Un traseu turistic a fost parcurs astfel: în prima zi 25% din întregul drum, în a doua zi 30% din restul drumului, iar în a treia zi ultimii 105 km. Aflaţi lungimea totală a traseului.

Rezolvare: Notăm cu d = distanţa totală.

$$\frac{25}{100}\cdot d + \frac{30}{100}\cdot\left(d - \frac{25}{100}\cdot d\right) + 105 = d \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot d + \frac{3}{10}\cdot\left(d - \frac{1}{4}\cdot d\right) + 105 = d \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot d + \frac{9}{40}\cdot d + 105 = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{19}{40}\cdot d + 105 = d \Rightarrow 19\cdot d + 4200 = 40\cdot d \Rightarrow 21\cdot d = 4200 \Rightarrow d = \frac{4200}{21} = 200\text{km, deci}$$

$d = 200$km.

3. Să se afle adâncimea AC a fântânii din *figura IV.2.* până la nivelul apei, ştiind că: CE = 2,8 m, CD = 4 m, DO = 3 m.

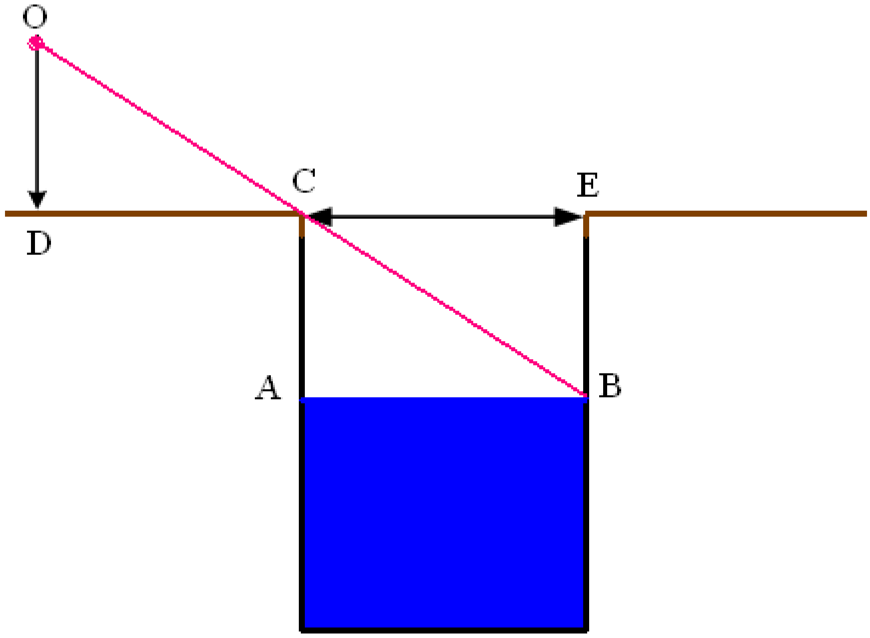


Figura IV.2. Desenul aferent problemei 2 (IV.2)

Rezolvare:

$\begin{cases} OD \perp DE \\ AC \perp DE \end{cases} \Rightarrow OD \parallel AC$ sau $\begin{cases} AC \perp DC \\ AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow DC \parallel AB$

ΔBEC este dreptunghic, iar AB = CE = 2,8 m.

În ΔCDO dreptunghic, aplicăm teorema lui Pitagora:

$$OC^2 = CD^2 + OD^2 \Rightarrow OC^2 = 16 + 9 \Rightarrow OC = 5\,m$$

$$\Delta ODC \sim \Delta BEC \Rightarrow \frac{OD}{BE} = \frac{DC}{CE} = \frac{OC}{CB} \Rightarrow \frac{3}{BE} = \frac{4}{2{,}8} \Rightarrow BE = 2{,}1\ m.$$

4. Câtă apă trebuie adăugată la 600 grame de soluţie de concentraţie 5%, pentru a o dilua cu 2%?

Rezolvare: Prin definiţie, concentraţie este egală cu: $c = \frac{m_d}{m_s} \cdot 100$, unde m_d = masa substanţei dizolvate, iar m_s = masa soluţiei – corespunde 100%.

Se cunosc următoarele date: $m_{s1} = 600g$, $c_1 = 5\%$, $c_2 = 2\%$ şi se cere $m_{apă}$.

$$m_d = \frac{c_1 \cdot m_{s1}}{100} = \frac{5 \cdot 600}{100} = 30\,g \text{ dizolvat}$$

$$m_{s2} = m_{s1} + m_{apă} = 600 + m_{apă}$$

$$c_2 = \frac{m_d}{m_{s2}} \cdot 100 \Rightarrow 2 = \frac{30}{600 + m_{apă}} \cdot 100 \Rightarrow 2 \cdot (600 + m_{apă}) = 3000 \,|: 2 \Rightarrow 600 + m_{apă} = 1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{apă} = 900\,g$$

5. Folosind imaginea din *figura IV.3.* şi cunoscând că AD = 8 km, CD = 4 km, AB = 10 km, calculaţi distanţa de la malul mării la insulă.

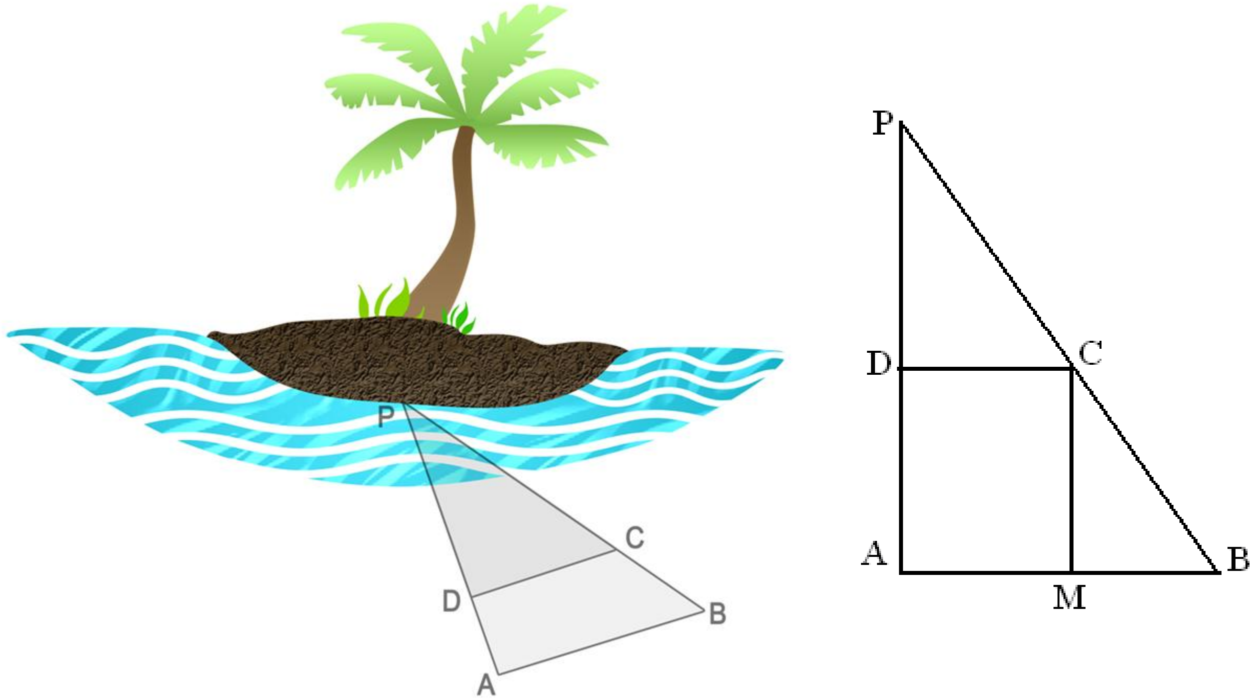


Figura IV.3. Desenul aferent problemei 5 (IV.2)

Rezolvare: Construim un desen ajutător în partea dreaptă a *figurii IV.3*.

În trapezul dreptunghic ABCD, construim $MC \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow MC = AD = 8\,km;\ AM = DC = 4\,km \Rightarrow BM = AB - AM = 6\,km$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic BMC obţinem: $BC^2 = BM^2 + CM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = 10\,km$

Din $AP \parallel MC \Rightarrow \Delta APB \sim \Delta MCB \Rightarrow \dfrac{MC}{AP} = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{CB}{PB} \Rightarrow \dfrac{8}{AP} = \dfrac{6}{10} \Rightarrow AP = 13,(3)\,km$.

6. Un produs s-a scumpit cu 15% din preţul iniţial. După o perioadă de timp, produsul s-a scumpit din nou cu 15% din noul preţ ajungând să coste 1058 ron. Calculaţi preţul iniţial.

Rezolvare: Notăm cu p = preţul iniţial.

$\dfrac{15}{100} \cdot p = \dfrac{3}{20} \cdot p \Rightarrow p + \dfrac{3}{20} \cdot p = \dfrac{23}{20} \cdot p$ - preţul după prima scumpire;

$\dfrac{15}{100} \cdot \dfrac{23}{20} \cdot p + \dfrac{23}{20} \cdot p = \dfrac{69}{400} \cdot p + \dfrac{23}{20} \cdot p = \dfrac{529}{400} \cdot p$ - preţul după a doua scumpire;

$\dfrac{529}{400} \cdot p = 1058 \Rightarrow p = 800\,ron$

7. În urma unui accident rutier o persoană a pierdut o cantitate de 0,5 l de sânge. Stabiliţi ce cantitate de sânge are persoana în organism după accident, ştiind că înainte de accident persoana cântărea 98 de kg.

Rezolvare: Se ştie că o persoană are o cantitate de sânge 8% din greutatea proprie.

Deci: $\dfrac{8}{100} \cdot 98 = 7,84\,kg$ de sânge înaintea accidentului.

Deci, după accident a mai rămas cu $7,84 - 0,5 = 7,34\,kg$ de sânge, cantitatea de sânge pierdută fiind necesar a fi recuperată prin intermediul perfuziei.

8. Cunoscând intervalul de revoluţie a Pământului, $T_P = 1\,\text{an}$, distanţa faţă de Soare a Pământului, $a_P = 1\,\text{UA}$ (unităţi astronomice), respectiv distanţa faţă de a planetei Marte, $a_M = 1{,}52\,\text{UA}$, să se calculeze perioada sinodică (perioada după care un corp ceresc ajunge în aceeaşi poziţie faţă de Soare din care a plecat) a planetei Marte.

Rezolvare: Din legea a treia a lui Kepler ştim că: $\frac{T_{pl}^2}{a_{pl}^3} = \frac{T_P}{a_P^3}$, unde T_{pl} este intervalul de revoluţie a planetei, în cazul nostru pentru planeta Marte, T_M, iar a_{pl} este semiaxa mare a planetei, în cazul nostru pentru planeta Marte, a_M. Deci, cu aceste notaţii şi cu datele din problemă, cea de-a treia lege a lui Kepler devine:

$$\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{T_P}{a_P^3} \Rightarrow \frac{T_M^2}{a_M^3} = 1 \Rightarrow T_M^2 = a_M^3 \Rightarrow T_M = \sqrt{a_M^3} = 1{,}874\,\text{ani}\,.$$

Perioada sinodică a unei planete este dată de relaţia: $T_{pl}^s = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_{pl}} - \frac{1}{T_P}\right|}$, în cazul de faţă, fiind:

$$T_M^s = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_P}\right|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{1{,}874} - \frac{1}{1}\right|} = 2{,}144\,\text{ani}$$

9. În *figura IV.4* este prezentat unul dintre cele 2 semicercuri mari cu componentele acestuia ale unui teren de baschet. Se dau: ABCD trapez isoscel cu AB = DC, lungimea liniei de aruncări libere, BC = 3,6 m, distanţa de la marginea exterioară a liniei de aruncări libere la marginea interioară a liniei de fund, MN = 5,8 m, AM = MD = 4,8 m, înălţimea sol-panou, MP = 2,9 m, diametrul coşului este de 40 cm, iar raza semicercului mic determinat de punctele C, O, B este de 1,8 m. Să se calculeze:

a) Aria trapezului ABCD şi determinarea liniei mijlocii EF;

b) Lungimea NP, de la punctul median al liniei de aruncări libere la panou;

c) Ariile şi lungimea coşului, respectiv a semicercului mic,

d) Ştiind că lungimea totală a unui teren de baschet de formă dreptunghiulară este de 28 m, iar lăţimea de 15 m să se calculeze perimetrul şi aria terenului de baschet.

Rezolvare:

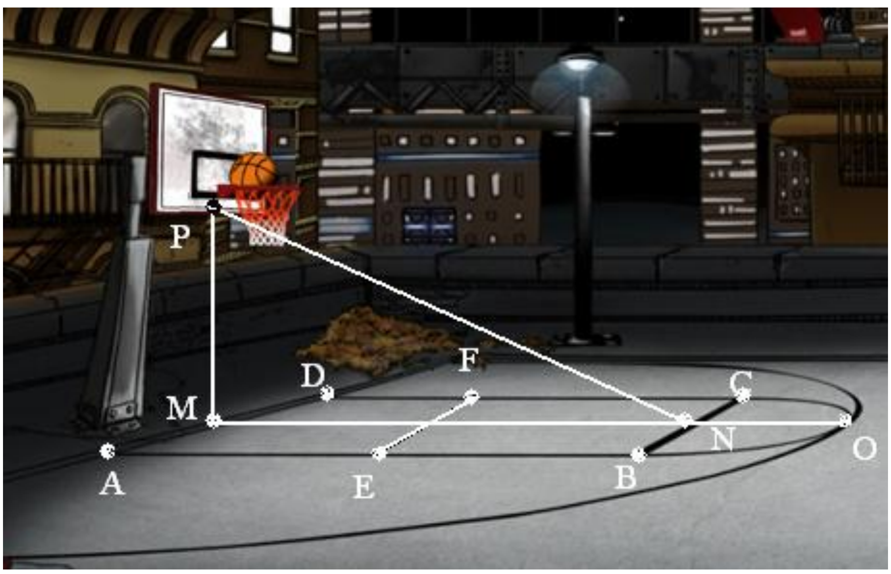


Figura IV.4. Desenul aferent problemei 9 (IV.2)

a) $A_{ABCD} = \frac{(AD+BC)\cdot MN}{2} = \frac{(9{,}6+3{,}6)\cdot 5{,}8}{2} = 38{,}28\,m^2 \Rightarrow EF = \frac{A_{ABCD}}{MN} = \frac{38{,}28}{5{,}8} = 6{,}6\,m$;

b) În triunghiul dreptunghic PMN aplicăm teorema lui Pitagora:

$PN^2 = PM^2 + MN^2 \Rightarrow PN = \sqrt{42{,}05} = 6{,}48\,m$;

c) $A_{coş} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = 400\pi\,cm^2$; $L_{coş} = 2\pi r = \pi d = 40\pi\,cm$,

$A_{semicerc} = \frac{\pi r^2}{2} = 1{,}62\pi\,m^2$; $L_{semicerc} = \pi r = 1{,}8\pi\,m$.

d) $P_{teren} = 2\cdot(28+15) = 86\,m$, $A_{teren} = 28\cdot 15 = 420\,m^2$.

10. Un corp cu masa m = 3 kg este urcat uniform pe un plan înclinat de lungime 5 m şi înălţime 3m sub acţiunea unei forţe de 24N, paralelă cu planul. Calculaţi:

a) Valoarea componentelor greutăţii corpului;

b) Valoarea forţei de frecare dintre corp şi plan.

Rezolvare: Construim desenul din *figura IV.5*.

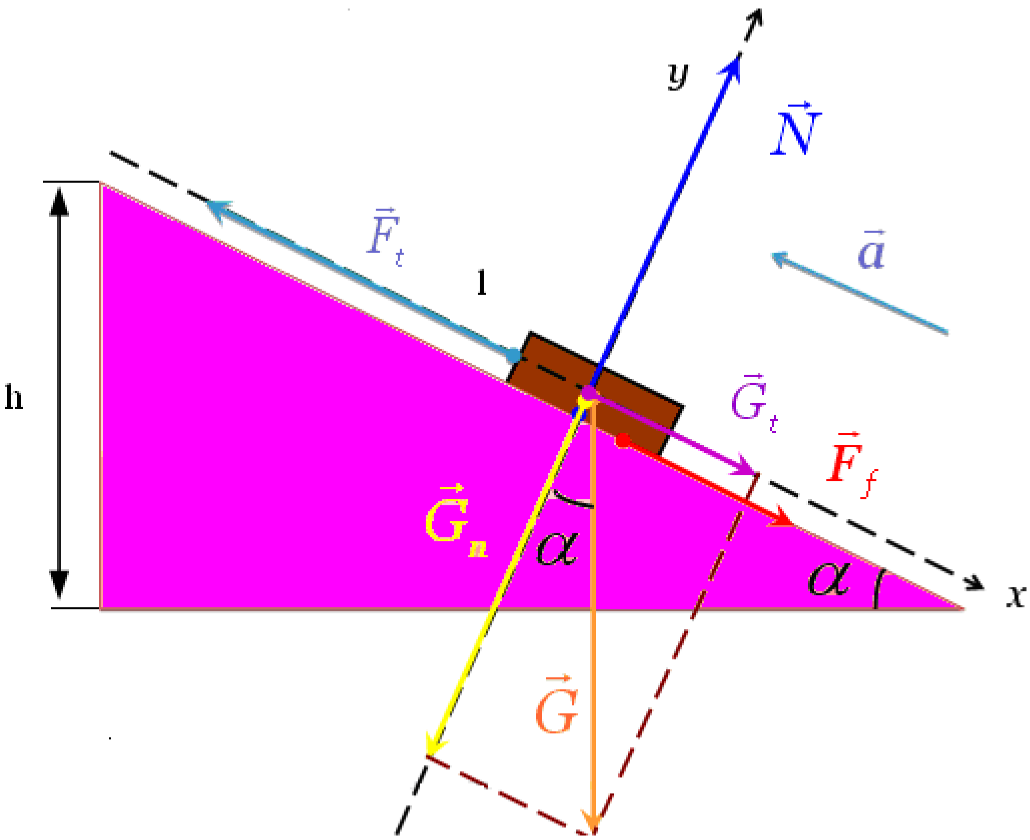


Figura IV.5. Desenul aferent problemei 10 (IV.2)

a) Greutatea corpului este: $G = m\cdot g = 3kg\cdot 10N/kg = 30N$

$G_t = m\cdot g\cdot \sin\alpha = G\cdot\frac{h}{l} = 30\cdot\frac{3}{5} \Rightarrow G_t = 18N$.

Componenta normală o calculăm cu teorema lui Pitagora:

$G_n^2 = G^2 - G_t^2 = 900 - 324 - 576 \Rightarrow G_n = 24N$

b) Forţa cu care se ridică corpul este de 24N, iar $G_t = 18N \Rightarrow$ apare o forţă de frecare egală cu diferenţa: $F_f = F_t - G_t = 24 - 18 \Rightarrow F_f = 6N$.

IV.3. JOCURI ŞI REBUSURI

Jocul 1. „Ceasul matematic”

Efectuaţi calculele din expresiile matematice din tabel, astfel încât să le puteţi aşeza corespunzător pe cadranul ceasului din *figura IV.6*.

$\sqrt{2^2\cdot 5+2^2\cdot 11}$	$\sqrt{\frac{(4!)^4}{4^6}}$	$(10-10)!+10$	$\left[\frac{1}{0,(3)}\right]^2:3$
$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$	$\left(-\frac{12}{3}\right)\cdot(-2)-2\sqrt{4}$	$\sqrt{121^2-2\cdot 21\cdot 121+21^2}$	$5+\frac{5+5}{5}$
$\lvert 6-\sqrt{8}\rvert+\lvert 1-\sqrt{8}\rvert$	$\sqrt{124+11\sqrt{12}}-\sqrt{28-5\sqrt{12}}$	$\sqrt{(13-\sqrt{25})\cdot(13+\sqrt{25})}$	$3\frac{x}{3}-\frac{7}{3}=1\frac{1}{3}$

De exemplu, $\left[\frac{1}{0,(3)}\right]^2:3=\left[\frac{9}{3}\right]^2:3=3$.

Deci, la locul unde pe cadran lipseşte ora 3, jucătorul va scrie expresia: $\left[\frac{1}{0,(3)}\right]^2:3$.

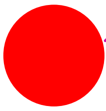
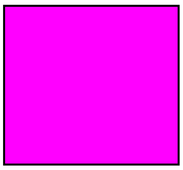
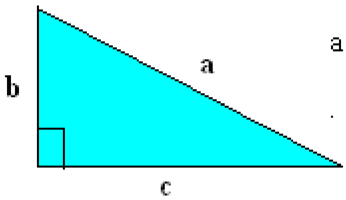
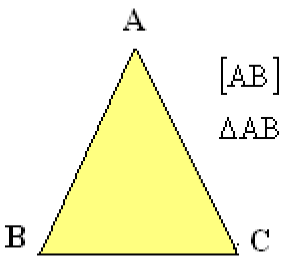
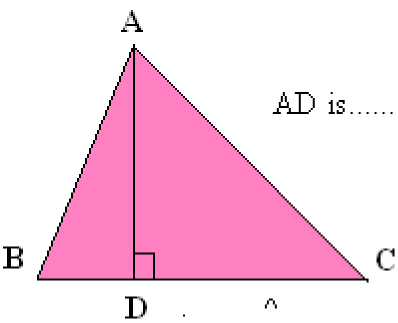
Scopul jocului este evident acela de a cunoaşte modul de rezolvare a diverselor operaţii matematice de diferite grade, corelat cu cunoaşterea poziţiei celor 12 ore de pe cadranul unui ceas.

De asemenea, jucătorii pot construi şi alte exemple de acest tip folosind acelaşi cadran, dar expresii matematice diferite.

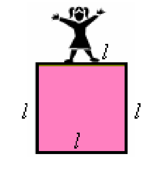
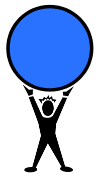
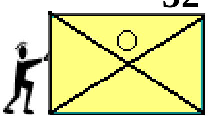
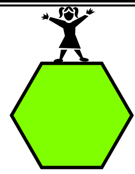
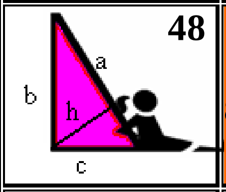
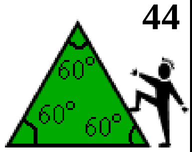
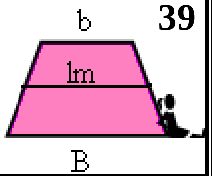
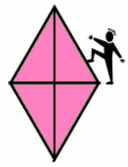
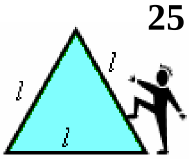
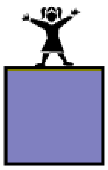
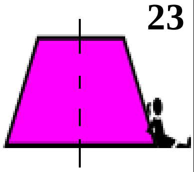
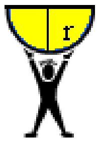
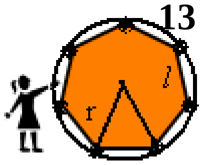
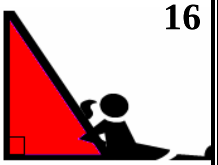
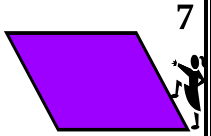
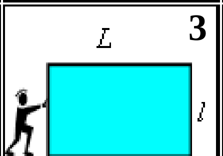
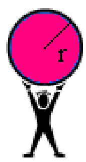
Figura IV.6. Ceasul matematic

Jocul 2. „Potriveşte corespunzător”

Obiectivul jocului este ca jucătorul să se familiarizeze cu limbajul matematic în limba engleză. Prin urmare, găsiţi corespondenţa potrivită între cele două coloane de mai jos. De exemplu,

Column A /Coloana A **mathematical expresion/picture (expresii/imagini matematice)**	**Column B/Coloana B** **mathematical term / termeni matematici**
$\cap$ $235 + x = 347{,}59$ $\cup$  $\sqrt{a}$ $\frac{13}{25} = {}^{2^2)}\frac{13}{5^2} = \frac{13 \cdot 4}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{52}{10^2} = 0{,}52$  $a = b \cdot q + r$; $r < b$, r is... $b \mid a$ $\mid a \mid$ $\varnothing$ $\frac{p}{100} = p\%$ $+$ $=$  a is... $a^2 = b^2 + c^2$ $\sqrt{a \cdot b}$ $A = \{10^x \mid x \in N,\ 0 \le x < 9\}$ $\bullet$ $\frac{a+b}{2}$ $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{100} < 2^{101}$   $[AB] \equiv [AC]$ ΔABC is....... $\frac{a}{b}$, $b \ne 0$, is..., a is..., b is... 2,4,6,8,...,2n  AD is.......... $\frac{AD \cdot BC}{2}$ is..........for ΔABC $\widehat{BAD}$ is.... 1,3,5,7,...,2n+1	**circle** **divided** **sum** **product** **even numbers** **intersection** **percent** **empty set** **union** **set** **equal** **hypotenuse** **remainder** **equation** **arithmetic average** **altitude of a triangle** **fraction** **acute angle** **geometric average** **module** **decimal fraction** **Pythagorean Theorem** **rectangle** **denominator** **radical** **odd numbers** **isosceles triangle** **inequality** **area** **numerator** **square**

Jocul 3. „Învăţaţi noţiuni matematice prin joc”

60 **VICTORIE**	59 $8^2-3^2+2^2$	58 	57 **Are toate unghiurile de $180^0 : 3$**	56 	55 $\frac{5!}{2}-5$
49 7^2+1-7^{7-7}	50 **l_m = (B+b):2**	51 $(8-\sqrt{13})\cdot(8+\sqrt{13})$	52 	53 **h = (b ·c) : a**	54 
48 	47 $8^2-5^2+3^2-1$	46 **Are măsura de 360^0**	45 **Are perimetrul P = 4 · *l***	44 	43 $8^2-4^2-(\sqrt{5})^2$
37 **Centrul O de simetrie = ∩ diagonalelor**	38 7^2-11	39 	40 $4\cdot\sqrt{4\cdot4!+4}$	41 **$a^2 = b^2 + c^2$**	42 $\frac{8^2+5^2-5}{2}$
36 $[0,(6)]^2\cdot9^2$	35 **Are √16 axe de simetrie**	34 $17\cdot\sqrt{\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2}$	33 $6^2-\sqrt{9}$	32 **Are 6 unghiuri de 120^0**	31 
25 	26 3^3-1	27 **Are diagonale ⊥**	28 	29 **Are latura egală cu raza *l* = r**	30 $4\cdot3!+6$
24 **Are un singur unghi drept**	23 	22 $\frac{44}{4}\cdot2$	21 **Are aria A = (l^2·√3):4**	20 	19 $4!-5$
13 	14 4^2-2	15 **Are lungimea L = π · r**	16 	17 9^2-8^2	18 **Are aria A = *L* · *l***
12 $17-\sqrt{25}$	11 **Are aria π · r^2**	10 $\sqrt{4\cdot4!+4}$	9 $5+5-5^{5-5}$	8 **Are n^0 axe de simetrie**	7 
1 **START**	2 $x^2-4=0$	3 	4 **Nu are axe de simetrie**	5 $(5\cdot5):5+5-5$	6 

Regulamentul jocului
„Învăţaţi noţiuni matematice prin joc”

Piesele de joc: jocul de pe carte care poate fi xeroxat; 1 zar; pioni.

Regulament:

Jocul poate fi jucat de către mai mulţi copii, de preferinţă 2, 3 sau 4. Este recomandabil, în special elevilor de cel puţin clasa a VI-a. Fiecare dintre copii îşi va alege un pion cu care va juca. Se va stabili o ordine de joc la aruncarea în ordine descrescătoare a numărului de pe zar. Jocul începe de la numărul 1, de la START; fiecare jucător înaintează în conformitate cu numărul de pe zarul aruncat de către el.

Jucătorul trebuie să găsească o corespondenţă corectă între imagini, reprezentate prin diverse figuri geometrice şi regulile/definiţiile/formulele de calcul. Această asociere se aplică, indiferent că jucătorul nimereşte prima dată pe figură sau pe regulă.

De exemplu, jucătorul ajunge la un moment dat pe numărul 25, care reprezintă un triunghi echilateral cu latura *l*; jucătorul caută şi găseşte corespondenţa care se află la numărul 21 şi reprezintă aria triunghiului respectiv, prin urmare jucătorul trebuie să coboare cu pionul de la 25 la 21; în cazul invers, în care jucătorul nimereşte prima dată pe 21 el va urca pe 25.

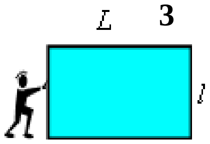
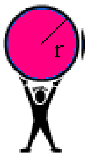
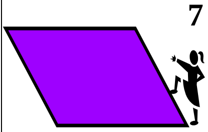
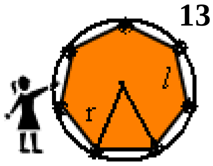
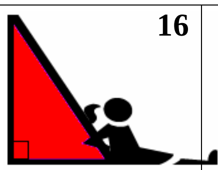
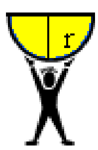
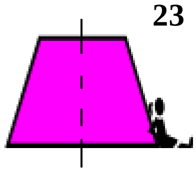
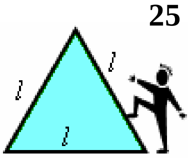
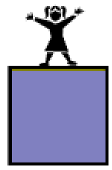
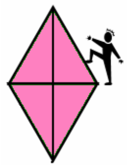
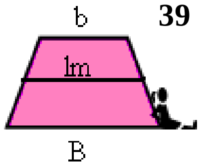
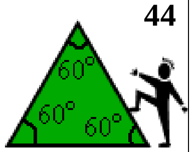
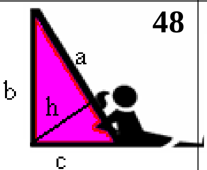
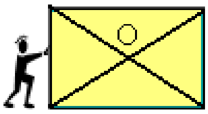
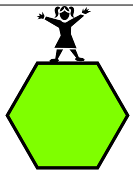
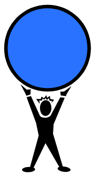
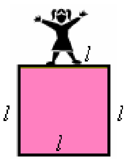
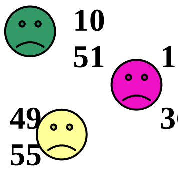
Există şi situaţii în care jucătorul este obligat să stea o tură; acelea sunt pe poziţiile în care se află figurată o faţă palidă; pe timpul cât stă o tură jucătorul va analiza cum s-a rezolvat expresia de calcul aferentă numărului pe care este poziţionat.

Jocul se poate complica, în sensul că se poate include temporizare, adică după câteva ture de obişnuinţă se poate apela la ajutorul unui cronometru. În momentul în care jucătorul aruncă cu zarul, înaintează, nimereşte pe un anumit număr ce reprezintă o figură geometrică sau regulă, este obligat ca într-un număr de câteva secunde (de exemplu, fiecare punct de pe zar reprezintă 10 s) să găsească corespondenţa, în caz contrar va sta o tură. În situaţii de decizie între a sta o tură şi a coborî, are prioritate a sta o tură.

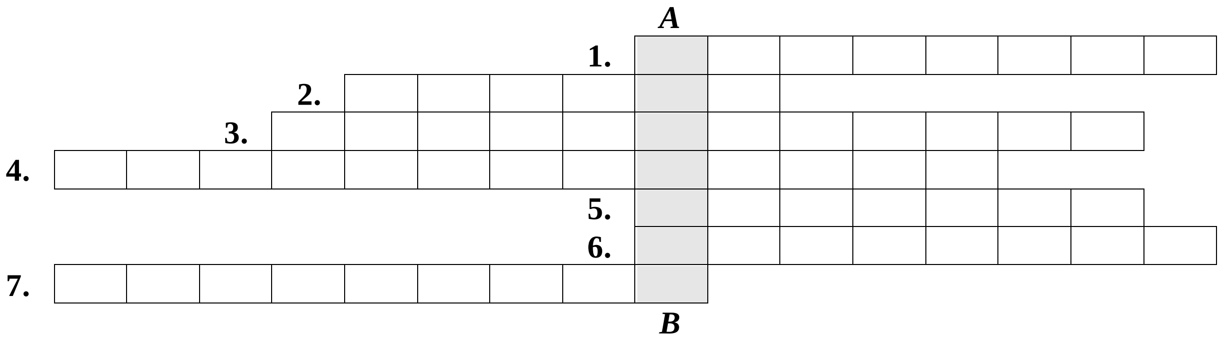
Câştigător se declară jucătorul care ajunge primul la 60 şi care va trebui să strige VICTORIE!

Scopul jocului este de recunoaştere a unor figuri geometrice şi proprietăţi, reguli, formule aferente acestora, dar şi de vizualizare a unor calcule de tip algebric, care se află în căsuţele colorate galben, portocaliu, verde, gri.

Agenda jocului: asocieri figuri geometrice - reguli/definiţii/formule de calcul

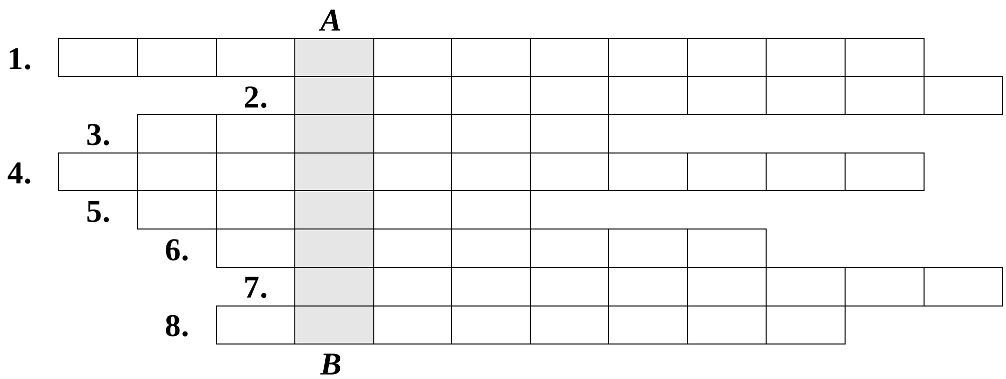
3 	**6** 	**7** 	**13** 	**16** 	**20** 
dreptunghi 3 ↔ 18	cerc 6 ↔ 11	paralelogram 7 ↔ 4	hexagon înscris 13 ↔ 29	Δ dreptunghic 16 ↔ 24	semicerc 20 ↔ 15
23 	**25** 	**28** 	**31** 	**39** 	**44** 
trapez isoscel 23 ↔ 8	Δ echilateral 25 ↔ 21	pătrat 28 ↔ 35	romb 31 ↔ 27	trapez 39 ↔ 50	Δ echilateral 44 ↔ 57
48 	**52** 	**54** 	**56** 	**58** 	 **10** **51** **17** **49** **55** **36**
Δ dreptunghic 48 ↔ 41; 53	dreptunghi 52 ↔ 37	hexagon 54 ↔ 32	cerc 56 ↔ 46	pătrat 58 ↔ 45	feţe palide *stai o tură!*

Rebus 1. Dacă se completează corect cerinţele de mai jos, pe traseul AB se va obţine denumirea simbolului unei operaţii matematice de ordin III.



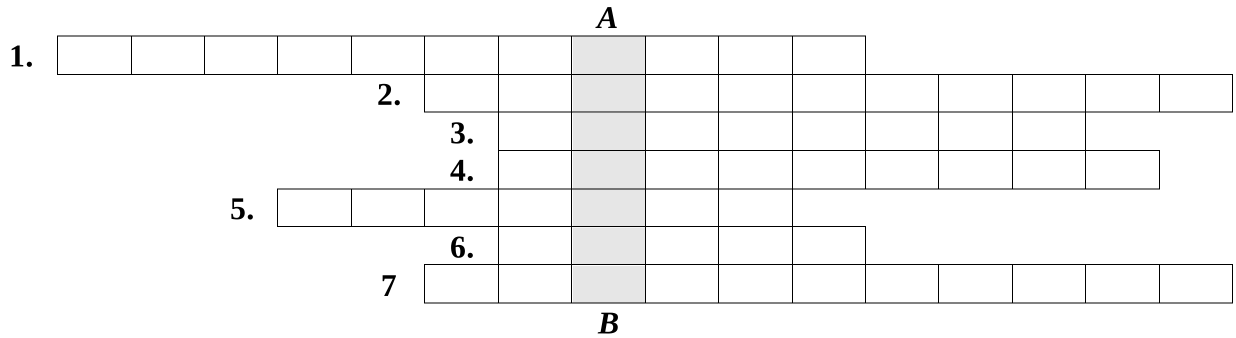
1. ………….. pătrată a numărului raţional pozitiv *a* este numărul raţional *x* cu proprietatea $x^2 = a$.
2. Numărul $a = (1+2+...+50) - 25\cdot 2 = 35^2$ este …… perfect.
3. Operaţia $3\sqrt{19} = \sqrt{3^2\cdot 19}$ se numeşte ……………factorilor sub radical.
4. Operaţia $^{\sqrt{5})}\dfrac{10}{2\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ se numeşte operaţie de ………………..a numitorilor.
5. Formulele de tipul $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$ se numesc formulele radicalilor………………
6. Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr se face după un……………bine stabilit.
7. $\sqrt{2}$ este un număr…………………

Rebus 2. Descoperiţi numele unui mare matematician pe traseul *AB*, prin completarea corectă a cerinţelor.



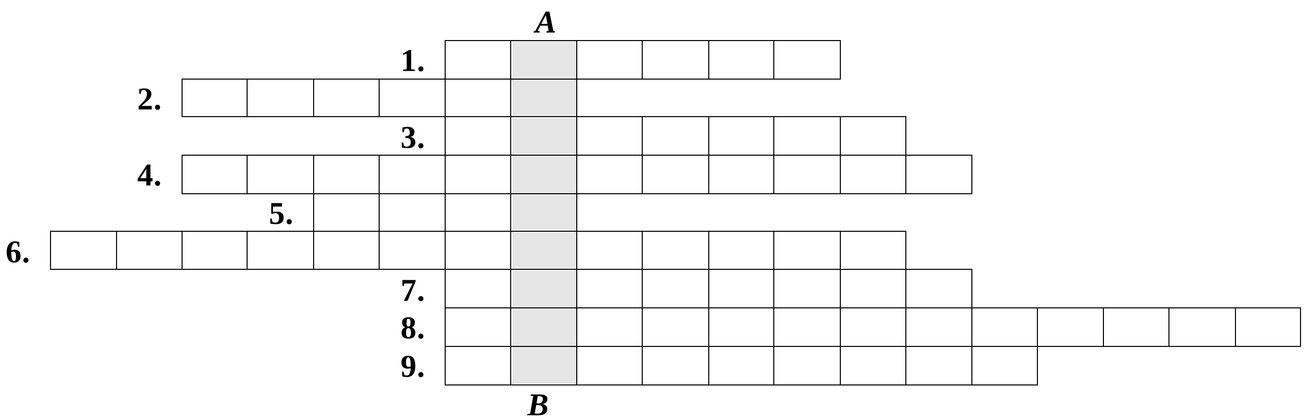
1. Produsul catetelor împărţit la 2 este aria unui triunghi……………….
2. Extrăgând rădăcina pătrată din suma pătratelor catetelor unui triunghi se obţine……………
3. Laturile alăturate unghiului de 90^0 într-un triunghi se numesc………………
4. Numerele de forma (3k, 4k, 5k), $k \in N$ se numesc numere……………………
5. Un triunghi dreptunghic are un …………………de 90^0.
6. Funcţia trigonometrică……….se defineşte ca fiind raportul dintre cateta alăturată şi ipotenuză.
7. ……………teoremei lui Pitagora spune că, dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.
8. Raportul dintre cateta opusă şi cateta alăturată defineşte funcţia trigonometrică numită …………

Rebus 3. Dacă se completează corect cerinţele de mai jos, pe traseul *AB* se va obţine numele unei expresii des întâlnite în matematică.



1. Ecuaţiile care au aceeaşi mulţime de soluţii se numesc ecuaţii……….
2. x din ecuaţia $ax + b = 0,\ a, b \in Q,\ a \neq 0$ se numeşte………………….
3. $S = \{-4; +4\}$ este ………………..…soluţiilor ecuaţiei $x^2 - 16 = 0$.
4. Într-o ecuaţie de forma $3x - 2m = 0$, cu necunoscuta *x*, *m* se numeşte…………………..
5. $x = 2$ este …………dublă pentru ecuaţia: $x^2 - 4x + 4 = 0$.
6. În forma generală a ecuaţiei de gradul I, $ax + b = 0,\ a, b \in Q,\ a \neq 0$, *b* este termen………
7. *a* şi *b* din forma generală a ecuaţiei de gradul I, $ax + b = 0,\ a, b \in Q,\ a \neq 0$ se mai numesc………

Rebus 4. Descoperiţi o noţiune matematică importantă pe traseul AB, prin completarea corectă a cerinţelor.



1. Există trei…… …….de asemănare ale triunghiurilor.
2. *O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile acestora, segmente proporţionale, spune teorema lui*………………….
3. Două drepte paralele formează cu o……………….unghiuri alterne interne.
4. Teorema…………a asemănării spune că, o paralelă dusă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte laturi sau cu prelungirile acestora un triunghi asemenea cu cel dat.
5. …………triunghiuri sunt asemenea, dacă au două perechi de unghiuri corespondente congruente.
6. Două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri……………..congruente.
7. ……………..ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.
8. Dacă se poate forma o proporţie cu lungimile a patru segmente, acestea se numesc segmente…..
9. *Dacă o dreaptă este paralelă cu o latură a unui triunghi şi trece prin mijlocul altei laturi a triunghiului, atunci ea conţine o linie mijlocie*, ne spune……………….teoremei liniei mijlocii în triunghi.

IV.4. PROBLEME LOGICO - DISTRACTIVE

1. Construiţi cifra 6, folosind exact 3 cifre identice şi operaţii matematice de diferite grade cunoscute.

Rezolvare: Vom obţine următoarele 10 cazuri posibile

$(0!+0!+0!)! = (1+1+1)! = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

$(1!+1!+1!)! = (1+1+1)! = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

$2+2+2=6$

$3\cdot 3-3=6$

$\dfrac{4!}{\sqrt{\sqrt{4^4}}} = \dfrac{24}{4} = 6$

$5+5:5=6$

$6+6-6=6$

$7-7:7=6$

$8-\sqrt{\sqrt{8+8}}=6$

$\sqrt{9}+\sqrt{9}-\sqrt{9}=3+3-3=6$

2. *Problema cu lumina din pod*

Unul singur dintre cele 3 întrerupătoare aflate la parterul unei case aprinde lumina în pod. Sarcina ta este să afli care comutator face asta, însă condiţia este că poţi merge în pod ca să verifici lumina o singură dată. Poţi spune cum faci ca să găseşti întrerupătorul bun?

Rezolvare: Este o problemă de logică. Se pleacă de la observaţia că un bec care funcţionează se încălzeşte. Atunci consider cele 3 întrerupătoare: 1, 2, 3.




întrerupător 1


întrerupător 2


întrerupător 3

Care întrerupător aprinde becul ?

De exemplu:

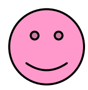
Pasul 1: apăs pe întrerupătorul 1 şi îl las pentru câteva minute aprins. De ce?

Păi, dacă întrerupătorul 1 este cel care aprinde becul din pod, atunci după câteva minute, becul se va încălzi; dacă întrerupătorul 1 nu este cel care aprinde becul din pod, atunci becul nu se va încălzi, deoarece nu se va aprinde.

Pasul 2: după o perioadă de timp sting întrerupătorul 1;

Pasul 3: apăs întrerupătorul 2 şi plec în pod să văd becul

oau! sper să nu mă împiedic sau să mă ard!



Odată ajunsă în pod să vedem cum gândesc, ce situaţii pot apare:

- dacă becul e aprins, atunci înseamnă că întrerupătorul 2 a aprins becul;
- dacă becul nu e aprins, dar e cald înseamnă că întrerupătorul 1 a aprins becul;
- dacă becul nu e aprins, dar e rece înseamnă că întrerupătorul 3 aprinde becul.

Bineînţeles că ordinea de raţionare poate fi oricare!

3. Motanul Tom aleargă cu viteza de 3m/s după şoricelul Jerry, care se găseşte la 2,5 m de motan. Şoarecele aleargă cu viteza de 2m/s spre gaura salvatoare, aflată la 4m de el. Umbra lui Tom se apropie ameninţător şi, vai, gaura este departe! Va reuşi Jerry să scape?

…… …

Rezolvare:

Fie d_{TJ} = distanţa dintre Tom şi Jerry = 2,5 m

d_{Jg} = distanţa dintre Jerry şi gaură = 4 m

$d_{Tg} = d_{TJ} + d_{Jg}$ = 6,5 m = distanţa dintre Tom şi gaură.

v_J = 2m/s

v_T = 3m/s

Calculăm timpii de deplasare:

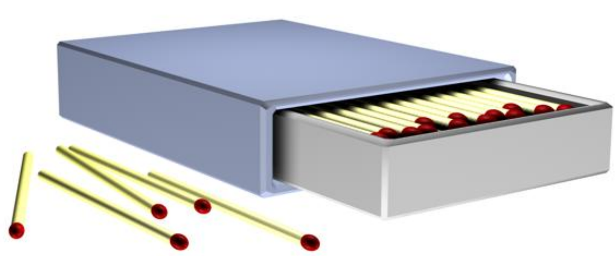
$$t_J = \frac{d_{Jg}}{v_J} = \frac{4}{2}\frac{m}{m/s} = 2s$$

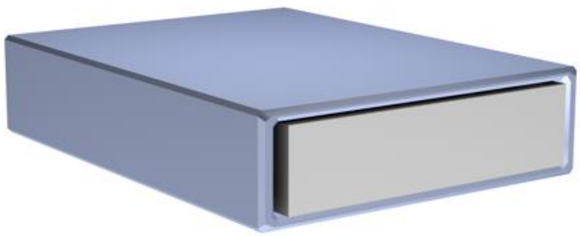
$$t_T = \frac{d_{Tg}}{v_T} = \frac{6{,}5}{3}\frac{m}{m/s} = 2{,}16s$$

$\Rightarrow t_T > t_J$, deci Jerry a scăpat şi e tare, tare fericit!

4. ***Cum puteţi ghici câte beţe sunt într-o cutie de chibrituri "după ureche"?***

Într-o cutie de chibrituri obişnuită sunt până la 50 de beţe de chibrituri. Evident, după o perioadă de folosire, rămân mai puţine. Rugăm posesorul cutiei să numere, fără să vedem noi, beţele din cutie şi să scoată din ele afară suma cifrelor numărului de beţe, iar restul să le introducă înapoi în cutie. Dacă luăm cutia şi o scuturăm în dreptul urechii noastre, după sunetul produs, putem ghici câte beţe au rămas în cutie. Cum?





Rezolvare: Numărul beţelor din cutie este format din două cifre: $\overline{ab}$.

Avem: $\overline{ab} - (a + b) = 10a + b - a - b = 9a$.

Deci, în cutie va rămâne un multiplu de 9 beţe: 9, 18, 27, 36 sau 45.

În funcţie de sunetul produs, ne putem da seama, dacă cutia este mai plină sau mai goală şi putem ghici numărul de beţe rămas în cutie.

Dacă cutia conţine un număr de chibrituri format doar dintr-o singură cifră, cazul e banal, se scot toate chibriturile existente, iar cutia rămâne goală.

5. ***Ceasul celor 3 cifre de 4***

Toate orele ceasului sunt reprezentate doar de 3 cifre de 4 prin intermediul operaţiilor matematice de grad I, II şi III. Citiţi orele de pe *Ceasul celor 3 cifre de 4*, din *figura IV.7*. *Observaţie*: se poate folosi notaţia: 0.(4) = .(4).

Agenda calculelor:

$\sqrt{4}-4:4=1$

$(4+4):4=2$

$4-4:4=3$

$4+4-4=4$

$4+4:4=5$

$\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}=6$

$\frac{4!+4}{4}=7$

$4+\sqrt{4}+\sqrt{4}=8$

$\sqrt{\sqrt{\left[\frac{4}{.(4)}\right]^{4}}}=9$

$\sqrt{4\cdot 4!+4}=10$

$\frac{44}{4}=11 \quad 4+4+4=12$

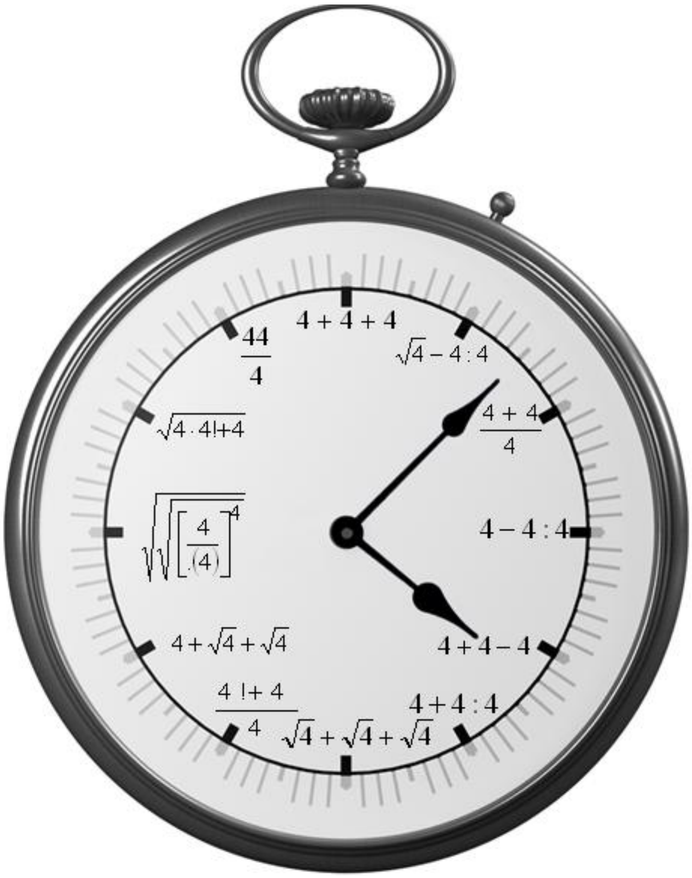


Figura IV.7. Ceasul celor 3 cifre de 4

6. ***Ceasul celor 5 cifre de 5***

Cu ajutorul operaţiilor matematice cunoscute şi folosind 5 cifre de 5, obţineţi cifrele care lipsesc pe cadranul ceasului. Citiţi orele de pe *Ceasul celor 5 cifre de 5*, din *figura IV.8*.

Agenda calculelor:

$(5+5+5)^{5-5}=1$

$\frac{5+5}{5}+5-5=2$

$5-\frac{5}{5}-\frac{5}{5}=3$

$(5+5+5+5):5=4$

$(5\cdot 5):5+5-5=5$

$(5\cdot 5):5+5:5=6$

$5+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}=7$

$5+5-\frac{5+5}{5}=8$

$5+5-5^{5-5}=9$

$5\cdot 5-(5+5+5)=10$

$5+5+5^{5-5}=11$

$(5+5):5+5+5=12$

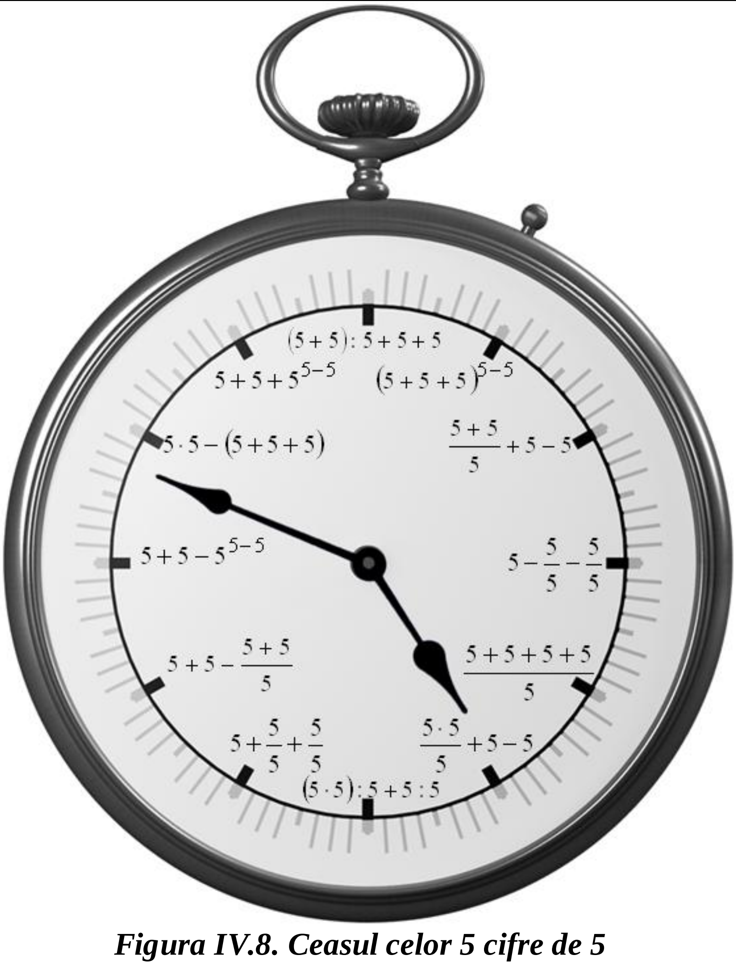


Figura IV.8. Ceasul celor 5 cifre de 5

$$\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}_{\text{2011 fa}}$$

7. ***Problemă distractiv-instructivă: 64 = 65 sau teorema aditivităţii ariei este falsă?***

Geo a decupat din pătratul ABCD din *figura IV.9.*, confecţionat din hârtie, 4 figuri geometrice noi:

- două triunghiuri dreptunghice congruente, ABG şi AEG, având catetele de 3 cm, respectiv 8 cm şi
- două trapeze dreptunghice congruente, EFHD şi CHGF, cu înălţimile de 5 cm, bazele mici de 3 cm şi bazele mari de 5 cm.

Geo a observat că poate rearanja figurile obţinute sub forma unui *"triunghi"* cu baza de 10 cm şi înălţimea de 13 cm, ca în *figura IV.10.*, având aria 10 cm x 13 cm /2= 65 cm^2.

Geo a ajuns într-o mare dilemă: el ştie din geometrie că aria pătratului, în cazul nostru 64 cm^2, ar trebui să fie egală cu aria triunghiului obţinut din alăturarea celor patru figuri decupate din pătrat, adică **64 = 65 !**

Geo e un elev bun atât la geometrie, cât şi la algebră, el ştie că undeva în raţionamentul său s-a strecurat o eroare, deoarece teorema aditivităţii ariei este adevărată şi nici 64 nu poate fie egal cu 65. După câteva calcule Geo şi-a dat seama că aparenţele ne pot înşela uşor. Voi puteţi depista şi argumenta în ce constă eroarea logică iniţială comisă de Geo?

Indicaţii de rezolvare:

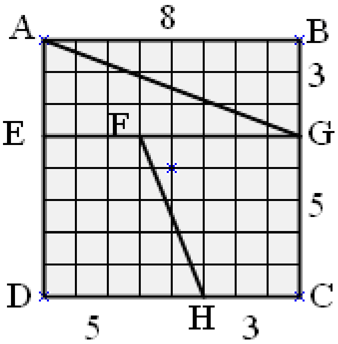


Figura IV.9. Pătratul ABCD decupat conform cerinţelor problemei

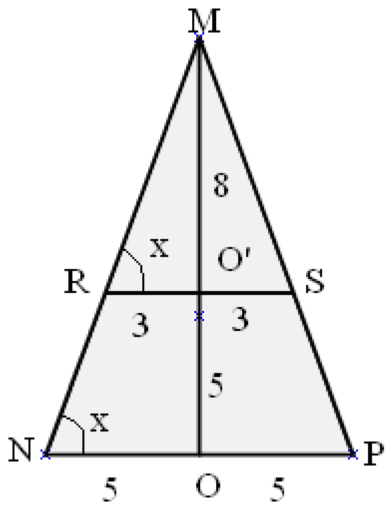


Figura IV.10. Triunghiul MNP rearanjat de Geo

Se poate arăta că *figura IV.10.*, nu este un triunghi decât în aparenţă, adică ipotenuza triunghiului dreptunghic nu se află în prelungirea laturii oblice a trapezului dreptunghic, dar deviaţia de unghi fiind foarte mică, nu se observă cu ochiul liber, dar se poate dovedi prin calcule.

De exemplu, dacă cele două laturi ar fi în prelungire, am avea:

1) *folosind definiţia funcţiei trigonometrice tg* pentru unghiurile corespondente MRO' şi MNO, notate cu x, în triunghiurile dreptunghice MO'R, respectiv MON, obţinem:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x = \dfrac{MO'}{RO'} = \dfrac{8}{3} \\ \mathrm{tg}x = \dfrac{MO}{NO} = \dfrac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{3} \neq \frac{13}{5}$$ deci unghiurile nu sunt corespondente, deci ipotenuza triunghiului dreptunghic nu se află în prelungirea laturii oblice a trapezului dreptunghic.

sau

2) *folosind asemănarea triunghiurilor dreptunghice* MO'R, respectiv MON,

obţinem $\dfrac{MO'}{MO} = \dfrac{RO'}{NO} \Rightarrow \dfrac{8}{13} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow$ fals, ceea ce demonstrează încă o dată că în raţionamentul lui Geo s-a strecurat o eroare.

De aceea, putem concluziona că argumentele de tipul "se vede că" nu sunt valabile în geometrie.